



Dr. Jörg Borchert\*, Marc Hasenbeck\*\*

# Bewertung und Steuerung von Kraftwerksscheiben

## Abstract

In diesem Artikel werden zunächst einleitend das traditionelle Bewertungsverfahren der Discounted Cashflow Methodik sowie die Realloptionsmethodik zur Bewertung und letztlich Steuerung von Kraftwerken bzw. Kraftwerksscheiben skizziert. Hierauf aufbauend wird ein Fall beschrieben, der in den folgenden Abschnitten behandelt wird. Zur Bewertung der Kraftwerksscheibe als Realloption wird daher nach der Fallbeschreibung ein kurzer Überblick über die stochastische Modellierung der Marktpreise gegeben. Es wird dabei davon ausgegangen, dass sowohl Brennstoffpreise als auch Strompreise stochastische Variablen sind. Danach wird der in diesem Artikel verwendete Ansatz der Least Squares Monte-Carlo-Methodik skizziert und die Kraftwerksscheibe entsprechend der Fallbeschreibung modelliert. Die Ergebnisse illustrieren den Mehrwert durch die Betrachtung der Kraftwerksscheibe als Realloption und demonstrieren den praktischen Einsatz der Methodik zur Steuerung der Kraftwerke.

To start off, in this article the common approaches of the discounted cash flow methodology as well as the real options methodology for the evaluation of power plant dispatch, or the dispatch of power plant stakes, are outlined. For the evaluation of the power plant stake as a real option there is initially a description of the case study, followed by an overview of the stochastic modelling of market prices. It is assumed that fuel prices as well as electricity prices are stochastic variables. Then the Least Squares Monte Carlo methodology used in this article is outlined and the power plant stake modelled according to the case study description. The results illustrate the added value created by regarding the power plant stake as a real option and demonstrate the practical use of the methodology for the dispatch of power plants. For allowances interact with bidding strategies and optimal institutional design.

## 1. Einleitung

Viele Unternehmen planen oder realisieren Beteiligungen an Kraftwerken. Die Beteiligung erfolgt überwiegend durch direkte Beteiligung an der entsprechenden Projektgesellschaft oder durch Kauf eines Langfristvertrages, der Stromlieferungen auf Basis der Eigenschaften von Kraftwerken beinhaltet. Diese erworbenen, hier als Kraftwerksscheiben bezeichneten Lieferrechte, werden Bestandteil der Beschaffungsportfolien oder separat vermarktet. Für viele Unternehmen stellen sich damit

Fragen der Bewertung sowie der wertorientierten Steuerung gegenüber den relevanten Marktpreisen.

In diesem Beitrag wird anhand einer Fallstudie ein handelsnahes Bewertungsschema für Kraftwerksscheiben beschrieben. Hierzu wird nach einer kurzen Einleitung in verschiedene Bewertungsmethoden das Modell zur stochastischen Beschreibung von realen Preisen für Strom und Brennstoffe dargestellt. Zur Bewertung der Kraftwerksscheibe auf Basis der stochastischen Preise wird aufgrund der zeitkoppelnden Restriktionen ein Verfahren der stochastischen dynamischen Programmierung verwendet. Hierzu wird zunächst das Prinzip vorgestellt, um dann die Bewertungsgleichungen für die kon-

krete Fragestellung aufzustellen. Anschließend werden die Ergebnisse und vor allem der Vergleich zur traditionellen Kapitalwertmethodik dargestellt.

## 2. Bewertungsmethoden und Illustration des Kraftwerks bzw. der Kraftwerksscheibe als Option

### 2.1 Traditionelle Bewertungsmethode

Die traditionelle Bewertung von real- sowie finanzwirtschaftlichen Assets erfolgt über die Kapitalwertmethode. Hierbei werden zunächst die zukünftig erwarteten Cashflows modelliert. In der energiewirtschaftlichen Praxis finden hierbei verschiedene Modelle Anwendung. Zunächst werden modellhaft die erwarteten Marktpreise, die Wert bestimmend für das Kraftwerk sind, ermittelt. Häufig werden hierzu deterministische Fundamentalmodele eingesetzt. Dazu werden zunächst Hypothesen zu vielen ökonomischen sowie technischen Randbedingungen des Preismodells formuliert. Basierend auf den Annahmen zu diesen exogenen Größen erfolgt die Modell endogene Bestim-

## Kontakt

### Dr. Jörg Borchert

BET GmbH in Aachen  
Alfonsstr. 44  
52070 Aachen

[joerg.borchert@bet-aachen.de](mailto:joerg.borchert@bet-aachen.de)

### Dipl. Vw. Marc Hasenbeck

Universität Halle  
Emil-Abderhalden-Straße 33  
06108 Halle

[hasenbeck@price-it.eu](mailto:hasenbeck@price-it.eu)

\* Dr. Jörg Borchert ist Berater bei der BET GmbH in Aachen

\*\* Dipl. Vw. Marc Hasenbeck ist Gesellschafter der price it in Halle und Doktorand an der Universität Halle

mung von Preisen. Hierbei wird häufig der Annahme der Wohlfahrtsoptimierung gefolgt und Preise generiert, die den Grenzkosten des Energiesystems entsprechen. Einige Fundamentalmodelle – so auch das der BET – generieren langfristig effiziente Grenzkosten basierte Preise. Hierbei entwickelt das Modell den Kraftwerkspark endogen weiter. Im Rahmen dieser Modelle werden die aus dem Kraftwerkspark resultierenden Angebotsfunktionen sowie die ebenfalls häufig modellierten angenommenen Nachfragefunktionen gleichgesetzt und der sich daraus ergebende Preis ermittelt. Die generierten Preise repräsentieren damit das Niveau, welches notwendig ist, um nachhaltig einen effizienten Kraftwerkspark zur Nachfragebedienbarkeit zu haben. Die derartig festgelegten Preise haben als langfristige Gleichgewichtsbedingungen normativen Charakter.

Diese Preisprognosen werden dann in eine (deterministische) Einsatzoptimierung übernommen, in der das jeweilige zu bewertende Objekt zum Teil technisch sehr detailliert abgebildet ist. Auf Basis der generierten Preisprognosen sowie der angenommenen Brennstoffpreise erfolgt im Rahmen der (deterministischen) Einsatzoptimierung die Festlegung der Mengen in Strom sowie den Brennstoffen (inkl. CO<sub>2</sub>).

Die Mengen und Preise werden in einem dritten Schritt im Rahmen eines Businessplans mit allen anderen Cashflow relevanten Größen verknüpft und folgend alle diskontierten Cashflows addiert. Häufig interessieren neben dem Kapitalwert auch spezielle Kennzahlen, wie Kapitalrenditen oder die Relation, mit der die Cashflows den Schuldendienst überraschen.

Wesentlich im Rahmen dieser Bewertungssystematik ist die Festlegung des relevanten Diskontfaktors, da die dem Projekt inhärenten Risiken in diesem berücksichtigt werden. Hierbei wird in aller Regel auf das capital asset pricing model (capm) zurückgegriffen. Für eine Menge zu einem Zeitpunkt (bzw. kleinem Zeitintervall) ergibt sich damit folgende Bewertungsgleichung:

$$KW_{t=0} = \exp(- (r + \lambda) T) \max (F_e^* - HF_g^* - K - fCO_2^*) M,$$

mit  $K$  = aggregiert Kostenfaktoren.

Hierbei wird der Cashflow zu dem betrachteten Zeitpunkt mit der stetigen risi-

koadjustierten Rate diskontiert. Der Cashflow ergibt sich aus dem Strompreis  $F_e$  abzüglich dem über die Heatrate  $H$  in Stromeinheiten repräsentierten Brennstoffpreis  $F_g$  (hier der Gaspreis) sowie dem CO<sub>2</sub>-Wert, sofern das Kraftwerk zu diesem Zeitpunkt betrieben wird, multipliziert mit der jeweiligen Absatzmenge  $M$ .

Die Sterne, die die jeweiligen Preise für Strom, Gas und CO<sub>2</sub> markieren, signalisieren, dass diese strenggenommen Erwartungswerte unter einer nicht weiter spezifizierten Wahrscheinlichkeitsverteilung sind. Eine explizite Wahrscheinlichkeitsbetrachtung spielt bei dieser Form der Bewertung keine Rolle. In praxi werden zwar üblicherweise Sensitivitätsanalysen durchgeführt, eine konsistente Zuordnung der entwickelten Szenarien zu Wahrscheinlichkeiten erfolgt jedoch nicht.

## 2.2 Illustration des Kraftwerks bzw. der Kraftwerksscheibe als Option

Wesentlich für den bisher skizzierten Ansatz ist, dass es eine Betrachtung zu einem einzelnen Zeitpunkt ist. Bei dieser Bewertung wird implizit unterstellt, dass die Welt genauso eintritt wie prognostiziert (d. h. perfekte Vorausschau) bzw. dass die unterstellten Bedingungen genauso „eingefroren“ werden. Durch eine Bewertung zu einem anderen Zeitpunkt werden andere Ergebnisse resultieren, da die Randbedingungen sich verändert haben. Diese Veränderungsfähigkeit der Ergebnisse spielt bei der Interpretation der Werte selten eine Rolle. Gerade aber ist Unsicherheit und damit die Unfähigkeit, perfekte Prognosen zu generieren, wesentliches Element in einem Wettbewerbskontext.

Sollten sich die Randbedingungen im Zeitverlauf verändern und mithin die ursprünglich im Rahmen der Einsatzoptimierung getroffenen Entscheidungen revidiert werden müssen, würde in praxi der operative Disponent des Kraftwerks bzw. der Scheibe genau dieses machen. Daher ist eine Bewertung interessant, die genau diese Reaktionsfähigkeit bzw. Flexibilität berücksichtigt.

Tatsächlich kann man das Kraftwerk als das Recht interpretieren, Brennstoff (inkl. CO<sub>2</sub>) in Strom zu wandeln. Da das Recht die Möglichkeit bedeutet, bei Eintritt einer definierten Bedingung etwas zu tun oder zu unterlassen, ist bei der Bewertung des Rechtes die Frage entscheidend, wie wahr-

scheinlich diese Bedingung erreicht wird. Übertragen auf das Kraftwerk bzw. die Scheibe stellt sich also die Frage, wie wahrscheinlich die Strompreise oberhalb der Grenzkosten liegen. Sollten sie unterhalb der Grenzkosten liegen, würde das Kraftwerk nicht betrieben werden. Das Recht wird umso wertvoller, je wahrscheinlicher die Bedingungen zur Produktion sind. Bei der Bewertung des Rechtes ist damit die gesamte Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Preise wichtig und nicht nur der Erwartungswert. Unterstellt man, dass der Disponent des Kraftwerks bzw. der Scheibe den Erwartungswert aus dem Recht maximieren möchte, ergibt sich folgende Bewertungsgleichung für einen einzelnen Zeitpunkt:

$$KW_{t=0} = \exp(- (r + \lambda) T) E_{t=0}^* (\max (0, F_e - HF_g - K - fCO_2) M).$$

Hier geht in die Bewertung die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die betrachteten Preise ein. Das heißt  $F_e$  als der Strompreis,  $F_g$  als Brennstoff- bzw. hier Gaspreis sowie CO<sub>2</sub> als CO<sub>2</sub>-Preis sind vollständig über ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentiert. Der Erwartungswert wird nicht für die einzelnen Preise gebildet, sondern über die gesamte Verteilung der Cashflows. Da die Cashflow-Funktion  $\max(\cdot)$  nur den Bereich positiver Cashflows berücksichtigt, ist die Verteilungsform Wert bestimmend. Der Erwartungswertoperator  $E(\cdot)$  ist mit einem Sternchen versehen. Hiermit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass die Erwartungen unter risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten formuliert werden. Hierauf wird im Rahmen der Modellierung der in diesem Artikel verwendeten Marktpreise eingegangen.

Die verschiedenen Kraftwerke lassen sich u. a. hinsichtlich ihrer Flexibilität unterscheiden. Nachfolgend wird zur Illustration des Charakters der Flexibilität zunächst ein Kraftwerk betrachtet, dessen Produktionsflexibilität auf einen Monat beschränkt ist. Es sei angenommen, dass dieses ein Zeitraum ist, für den es kontinuierlich liquide handelbare Forwardkontrakte gibt. Innerhalb dieser Zeiträume sollen zusätzlich technische Restriktionen unbedeutend sein.

Bei einer derartig vereinfachenden Betrachtung ist das Kraftwerk eine Serie von Call-Optionen (oder Kaufoptionen) auf den jeweiligen spread. Die spreads – zusammensetzbar aus den einzelnen For-

wardkontrakten für Strom und Gas<sup>1</sup> – werden als handelbar bis zum letzten Fälligkeitstag unterstellt.

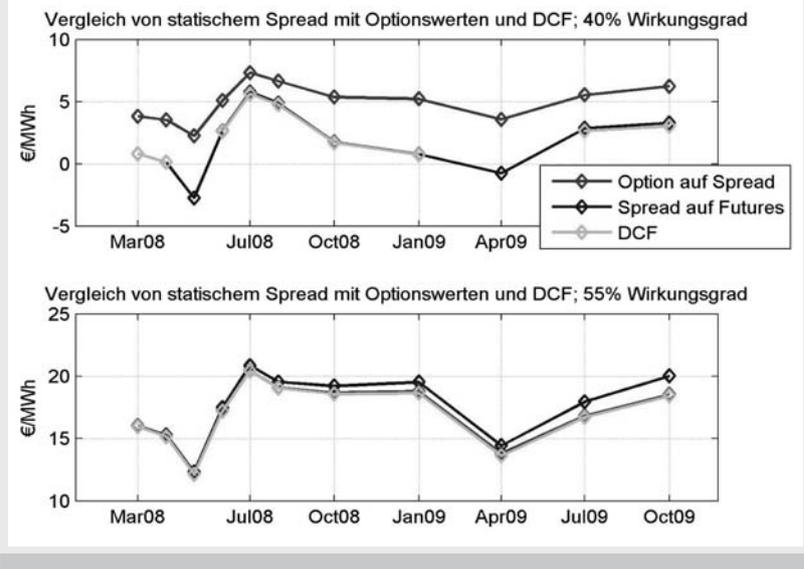
Wenn man nun zudem gemeinsame logarithmische Normalverteilungen für die Forwardcurven für Strom und Gas unterstellt, lässt sich der Wert der Option aus der Kraftwerksscheibe mit Optionsmodellen aus der Black-Scholes-Merton-Welt ableiten.<sup>2</sup>

Die Abbildung 1 fasst die Ergebnisse zusammen.

Zur Bestimmung dieser Ergebnisse wurden für Gas- und Stromforwards HJM-Modelle formuliert und diese an realen Daten kalibriert. Basierend auf zwei unterschiedlichen angenommenen GuD-Kraftwerken – eines mit 40 % Wirkungsgrad, das andere mit 55 % Wirkungsgrad – wurde sowohl der innere Wert als auch der gesamte Optionswert berechnet. Insbesondere das Kraftwerk mit einem Wirkungsgrad von 40 % ist deutlich näher am Geld und besitzt daher einen signifikanten zusätzlichen Zeitwert. Aus diesem Grunde ist der Optionswert (rote Linie in der oberen Grafik) deutlich oberhalb des traditionellen DCF-Wertes (entspricht dem inneren Wert).

Der Mehrwert des Kraftwerks gegenüber dem einfachen inneren Wert besteht wie bei der finanziellen Option in der Produktionsflexibilität. Sollte zwischen dem Betrachtungszeitpunkt der Bewertung und dem Fälligkeitszeitpunkt der Option – also dem letzten Zeitpunkt zur Entscheidung des Betriebs des Kraftwerks bzw. zur Nutzung der Kraftwerksscheibe – viel Zeit liegen, steigt vor allem unter

Abb. 1 | Vergleich des Wertes unterschiedlicher Kraftwerke



angenommener konstanter Volatilitätsrate der Preise die Wahrscheinlichkeit, dass das Betriebsrecht aus Kraftwerk oder Scheibe wertvoller wird. Gleichzeitig bedeutet ein Vermarkten des Kraftwerkes nicht den Verzicht auf das Optionsrecht. Dieses illustriert Abbildung 2.

Das unvermarktete Kraftwerk besitzt den Charakter einer Kaufoption auf den spread, d. h. das Recht bei wirtschaftlicher Opportunität auf den Betrieb und damit die Realisierung des spreads. Angenommen der spread<sup>3</sup> steigt auf 1 €/MWh und der für die Vermarktung Verantwortliche entscheidet sich (teilweise) eine Vermarktung des spreads vorzunehmen, entsprechend besteht das resultierende Portfolio aus der Kauf-Option sowie dem verkauften spread – Forward, d. h. aus gekauften

Gasforwards und verkauften Stromforwards. Das dritte Bild zeigt das resultierende Auszahlungsprofil des Portfolios, welches dem einer Verkaufsoption entspricht. Hieraus folgt, dass die Vermarktung vor der Fälligkeit der Option nicht zu einer Aufgabe der Flexibilität führt, sondern lediglich zu einem Wandel der Kaufoption auf den spread in eine Verkaufsoption. Die Verkaufsoption beinhaltet das Recht, nicht betreiben zu müssen, sollten sich die Bedingungen hierfür zum Zeitpunkt der Fälligkeit ungünstig darstellen.

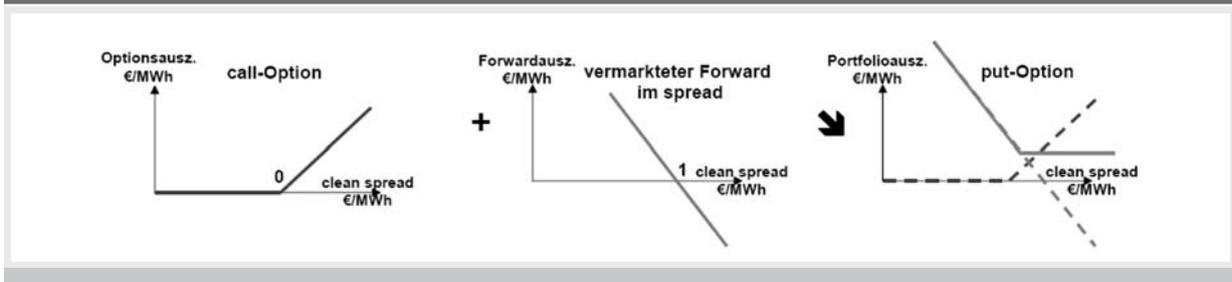
Eine derartige vereinfachte Betrachtung diene lediglich zur Illustration des Optionscharakters. Ein GuD-Kraftwerk bzw. eine entsprechende Scheibe ist natürlich keine Option auf Monatsforwards, sondern besitzt Flexibilität in viel kleineren Zeitschritten. Eine so grobe Betrachtung würde den Wert des Kraftwerkes bzw. der Scheibe unterschätzen. Insofern wird im Folgenden ein realistischerer Fall be-

1 Es sei hier aus Gründen besserer Anschaulichkeit abstrahiert von CO<sub>2</sub>-Preisen, die ohne Probleme mathematisch in die Betrachtung integriert werden könnten.

2 Es sei hier auf den Vortrag von Borchert und Hasenbeck verwiesen unter [http://www.gee.de/old/veranstaltungen-2008/Realopt\\_6\\_Hasenbeck+Borchert.pdf](http://www.gee.de/old/veranstaltungen-2008/Realopt_6_Hasenbeck+Borchert.pdf)

3 Wie oben bereits erwähnt wird hier unterstellt, dass der spread synthetisch aus den einzelnen Forwardgeschäften sowie der heatrate erstellbar ist.

Abb. 2 | Zusammenhang unvermarktetes und vermarktetes Kraftwerk vor Fälligkeit



geschrieben, der danach durch ein komplexeres Verfahren gelöst wird.

### 3. Beschreibung der Kraftwerks-scheibe und der Fragestellung

Um ein konkretes Bewertungsschema zu illustrieren, wird folgend ein Beispielfall entwickelt. Es wird von einer Scheibe eines GuD-Kraftwerkes mit folgenden Eigenschaften ausgegangen:

- Nettokapazität elektrisch: 400 MW<sub>el</sub>
- Netto-Wirkungsgrad elektrisch (im Optimum): 57 %
- Minimalleistung: 240 MW<sub>el</sub>
- Netto-Wirkungsgrad elektrisch bei Mindestteillast: 50 %
- sonstige variable Betriebskosten: 1 €/MWh
- Abnutzungskosten pro Anfahrvorgang: 10 €/MW<sub>el</sub>

Es wird in dieser Fallstudie davon ausgegangen, dass das Kraftwerk sowohl Gas auf den Spotmärkten bezieht, als auch den Strom dort absetzt. Insofern werden in der folgenden Modellbeschreibung zunächst Preismodelle für die relevanten Rohwaren skizziert. Diese Preismodelle reflektieren alle wesentlichen statistischen Eigenschaften der empirisch beobachtbaren Preise. In dieser Studie wird von stochastischen CO<sub>2</sub>-Preisen aus Gründen besserer Anschaulichkeit abstrahiert. Technisch lassen sich stochastische CO<sub>2</sub>-Preise leicht in das in diesem Artikel skizzierte Modell integrieren.

Reale Kraftwerke haben verschiedene technisch-ökonomische Restriktionen in ihrem Betrieb. Zum Beispiel können sie mehr oder minder flexibel in einem Leistungsband betrieben werden. Daneben können Restriktionen in der Laständerungsgeschwindigkeit auftreten. Zudem müssen minimale Stillstandszeiten sowie minimale Betriebszeiten eingehalten werden, um übermäßigen Materialverschleiß zu vermeiden.

In der folgenden Simulationsstudie wird vereinfachend von folgenden Restriktionen ausgegangen. Das Kraftwerk kann sich bezüglich seiner Leistung nur in fünf definierten Zuständen aufhalten: P<sub>0</sub>: keine Leistung, P<sub>1</sub>: erste Leistungsstufe in der Anfahrphase (ramp-up 1), P<sub>2</sub>: zweite Leistungsstufe in der Anfahrphase (ramp-up 2), P<sub>min</sub>: Mindestteillast und P<sub>max</sub>: Vollast. Das angenommene Kraftwerk kann nur sequentiell in die jeweilige Leistungsstufe

übergehen bzw. wieder abgeschaltet werden. Das heißt, steht beispielsweise das Kraftwerk still und soll wieder angefahren werden, muss zunächst die Leistungsstufe 1 sowie danach die Leistungsstufe 2 durchfahren werden, um dann die Mindestteillast zu erreichen. Jede Leistungsstufe kann in einem Zeitschritt erreicht werden. Die Zeitschritte sind in der folgenden Studie jeweils als Stunden definiert. Die im Rahmen des Anfahrprozesses entstehenden Brennstoffkosten für die unterschiedlichen Leistungsstufen ergeben sich multiplikativ aus der heatrate, dem jeweiligen Gaspreis (bzw. besser: dem jeweiligen Gaspreisszenario), der Menge sowie einem Faktor.

Es werden folgende Faktoren für den Brennstoff(mehr)verbrauch gewählt:

$$\text{Faktor} = \begin{cases} 10 \% ; P_0 \rightarrow P_1 \\ 10 \% ; P_1 \rightarrow P_2 \\ 200 \% ; P_2 \rightarrow P_{\min} \end{cases}$$

### 4. Entwicklung des Modells zur Bewertung von Kraftwerks-scheiben und Anwendung auf die Fallstudie

#### 4.1 Überblick über die verschiedenen Modellkomponenten

Wesentliche Komponenten im Aufbau des Gesamtmodells sind die Preismodelle für Strom und Gas, die Charakteristika des Kraftwerks und die Technik der stochastischen dynamischen Programmierung (SDP) zur Lösung des Bewertungsproblems. Da die Bewertung unter dem Aspekt einer optimalen dynamischen Steuerung über die Zeit hergeleitet wird, erhält man implizit optimale Kontrollmuster. Die ermittelten Kontrollmuster in diesem Artikel beziehen sich primär auf die Steuerung im Spotmarkt. Deng et al. (2005) zeigen in ihrem Artikel die Möglichkeit, die über die dynamische stochastische Programmierung ermittelten Werte für die Kraftwerks-scheibe in eine Serie standardisierter spread call Optionen zu zerlegen. Die Parameter der den Optionen zugrunde liegenden Futures lassen sich implizit aus dem Spotpreismodell herleiten. Mit den standardisierten Optionen wiederum werden Delta-Hedge-Strategien abgeleitet, deren Anwendung die Sicherung des berechneten Wertes mit einem Hedging-Fehler ermöglicht.

Man beginnt mit der Ermittlung der Parameter für die stochastischen Preispro-

zesse. Anschließend werden diese an aktuelle Futurespreise angepasst, d. h. die Erwartungswerte werden von den Futureskurven für Gas und Strom (täglich bzw. stündlich) vorgegeben. Nun werden mit den kalibrierten Modellen Monte-Carlo-Simulationen erzeugt. Eine genügend große Anzahl an Simulationen bildet die multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung der korrelierten Spotpreise für Gas und Strom ab. Die Technik des Mark-to-Market ermöglicht es, Hedgingstrategien zu Marktpreisen zu implementieren. Die Existenz eines Hedgeportfolios gewährleistet ein risikoneutrales Preis der Produkte, da der Hedge das Risiko quasi ausschaltet. Können offene Spotpositionen im Gasbereich bei Annahme von liquiden Speicherprodukten gesichert werden, so gestaltet sich das Problem der Sicherung von Strompositionen aufgrund der Nichtlagerfähigkeit diffiziler. Deng et al.<sup>4</sup> zeigen Hedgingstrategien und damit einhergehend risikoneutrale Bewertungsmöglichkeiten über den Einsatz von Futures auf. Die von Deng et al. vorgeschlagene Hedgingstrategie ist ebenfalls für Gas nutzbar, so dass die Annahme liquider Speicherprodukte bei gegebener relativ illiquider Marktstruktur nicht mehr getroffen werden muß. Die Anwendung dieser Strategien setzt allerdings auch liquide Futures-Märkte (inkl. balance of month) voraus, was wir hier unterstellen und damit die Verwendung eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes begründen. Somit ist eine Ermittlung der Risikoprämie nicht nötig.<sup>5</sup>

Der Aufbau des Zustandssystems, das sich aus den individuellen Kraftwerksrestriktionen bestimmt und die Möglichkeiten des Übergangs von einem Zustand in einen anderen (Transition-System) beschreibt, wurde bereits in Abschnitt 3 vorgestellt. Die Wechselmöglichkeiten von Zustand zu Zustand werden über ein zustandsabhängiges Set von Kontrollvariablen definiert. Um einen gewinnmaximalen Pfad bei der Steuerung zu wählen, muss der Kraftwerksbetreiber neben den angesprochenen Restriktionen auch die unsicheren Gas- und Strompreise in die Entscheidung einfließen lassen. Die Lösung dieses Problems erfordert eine sorgfältige Abwägung der zu verwendenden Methode für die Kraftwerksbewertung. Im Folgenden stellen wir ein Verfahren

4 vgl. Deng et al (2005)

5 Sollte eine risikobehaftete Bewertung vorgezogen werden, kann eine aus Marktpreisen filterbare Risikoprämie integriert werden.

vor, das auf Monte-Carlo-Simulationen basiert. Die Pfadabhängigkeit (heutige Entscheidungen restringieren den zukünftigen Zustandsraum) wird durch Regressionen zur Berechnung abhängiger Erwartungswerte (Conditional Expectations) berücksichtigt.<sup>6</sup> Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der Möglichkeit der Erweiterung um zusätzliche stochastische Faktoren und Zustände. So kann der hier vorgestellte Rahmen problemlos um CO<sub>2</sub>-Zertifikate oder beispielsweise beschränkte Rechte im Falle von Tolling-Agreements erweitert werden. Neben der freien Anzahl an Faktoren können auch Preisspitzen (z. B. über Poisson-Prozesse) eingebaut werden, um eine realistische Darstellung des Strompreisprozesses zu gewährleisten. Diese Vorteile bedingen die Wahl des Least-Squares-Monte-Carlo-Verfahrens (LSMC) im Rahmen der vorgestellten Aufgabe. Alternative Verfahren wie das Baum- oder Finite-Differenzen-Verfahren leiden bei mehr als 2 Faktoren unter dem ‚Curse of Dimensionality‘<sup>7</sup>. Weiterhin sind in dem Baumverfahren Preisspitzen kaum umzusetzen. Finite-Differenzen-Verfahren lassen über einen PIDE-Ansatz (PIDE: Partial-Integro-Differential Equation) zwar die Berücksichtigung von Poissonprozessen zu<sup>8</sup>, allerdings wird das Verfahren dadurch erheblich verlangsamt. Die optimale Lösung wird definiert über das resultierende Set der optimalen Handlungen in jedem Zustand zu jedem Zeitpunkt. Im Rahmen der Bewertung werden alle realisierbaren Preispfade bei optimaler Handlung mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit gewichtet. Im folgenden

Abschnitt werden zunächst die verwendeten Preisprozesse näher erläutert, bevor die Gewinnmaximierung der Kraftwerkscheibe über die optimale Wahl der Kontrollvariablen gezeigt wird.

**4.2 Modellierung von Spotpreisen für Strom und Gas**

Obwohl komplexe Modelle in unseren Augen notwendig und in den vorliegenden Methodenkontext integrierbar sind, beschreiben wir im Folgenden für die Simulation der Gaspreise ein einfaches Ein-Faktor-Modell, mit dem Ziel, einen kompletten Modellaufbau für Simulationszwecke kompakt darzustellen. Da Strompreise wesentlich komplexer als Gaspreise sind, greifen wir bei der Wahl für EEX-Spotpreissimulationen auf ein kommerzielles Modell zurück, dessen Aufbau aufgrund des Umfangs in dem vorliegenden Artikel nur skizziert wird. Wir denken, mit diesem Vorgehen sowohl die Ansprüche an ein grundlegendes Verständnis als auch an eine wissenschaftlich fundierte Studie zu dem Wert von Flexibilitäten zu erfüllen.

**4.2.1 Stochastische Modellierung der Gaspreise**

Das Grundmodell für die Gaspreise sieht in finanzmathematischer Schreibweise wie folgt aus:

$$dx = \kappa (f_t - x) dt + \sigma dz, \text{ wobei}$$

- x: logarithmierter Preis
- dt: Zeitintervall zwischen zwei Simulationsschritten
- dx: Veränderung von x in einem Zeitschritt dt (dx = Rendite in dt)
- f<sub>t</sub>: langfristiger logarithmierter Erwartungswert (deterministisch)
- σ: Volatilität in Prozent p. a. und

- dz: Inkrement eines Wiener Prozesses
- κ: Parameter für Geschwindigkeit p. a., mit der Abweichungen vom Gleichgewicht (f<sub>t</sub> - x) wieder abgebaut werden.

Man nennt diese Art von Prozess einen lognormalverteilten Mean-Reversion-Prozess. Die modellierten Renditen dx und somit auch ihre aufkumulierten Summen sind normalverteilt. Aus den normalverteilten Renditen lassen sich unter Kenntnis eines Anfangskurses S<sub>0</sub> die jeweils aktuellen Preise herleiten. Diese Preise sind lognormalverteilt, somit sind die Logarithmen der Preise normalverteilt. Abbildung 3 verdeutlicht diese Zusammenhänge.

Für nähere Erläuterungen siehe u. a. Schwartz.<sup>10</sup> Die Parameter lassen sich auf verschiedene Wege bestimmen. Man kann die Saisonparameter (Funktion f<sub>t</sub>) beispielsweise implizit während des Kalibrierungsvorgangs bestimmen. Zur Bestimmung der stochastischen Parameter im vorliegenden Kontext wandeln wir die obige stochastische Differentialgleichung in einen diskreten AR-Prozess (AR: autoregressiv) nach dem Vorgehen in Dixit und Pindyck um.<sup>11</sup> Die Parameter des AR(1)-Prozesses können nun über Regression geschätzt werden und anschließend in die Parameter der Differentialgleichung konvertiert werden. Vorab sollte die Saisonfunktion der Spotpreise f<sub>t</sub> bestimmt werden, um eine Verzerrung der Parameter zu vermeiden.<sup>12</sup> Hierfür verwenden wir

9 Als langfristiges Mittel wird die Spotsaison verwendet. Die Parameter in diesem Beispiel resultieren aus TTF-Preisen für 2004 bis 2009. Die Halbwertszeit von Störungen beträgt 47 Tage.

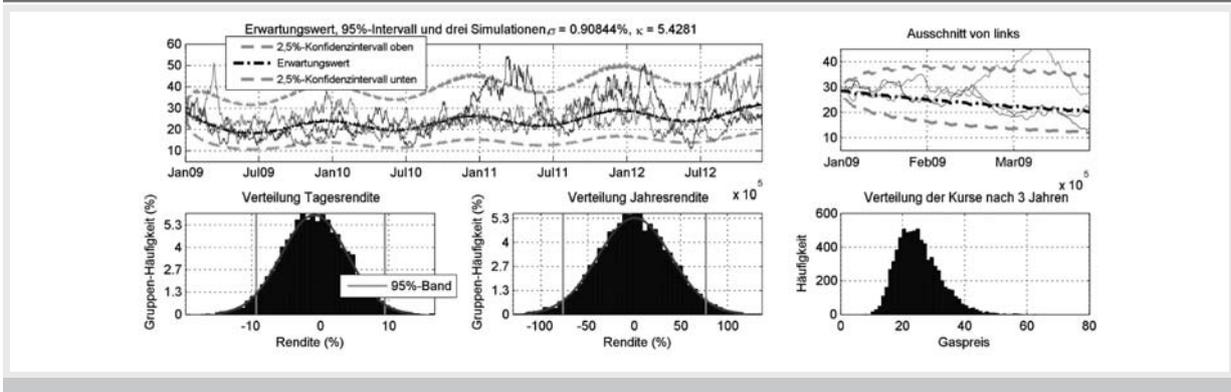
10 vgl. Schwartz (1997)

11 vgl. Dixit, Pindyck (1994)

12 Eine Nichtbeachtung von deterministischen Saisonwirkungen führt zu einer Überschätzung der Varianz, die allein die stochastischen Größen messen soll.

6 vgl. Longstaff, Schwartz (2001)  
 7 vgl. Wilmott (2000)  
 8 vgl. Tavella, Domingo (2000)

**Abb. 3 | Simulationen und Auswertung eines lognormalverteilten Mean Reversion Prozesses<sup>9</sup>**



die Technik der Fourieranalyse zur Zyklenermittlung aus dem logarithmierten Datensatz.<sup>13</sup> Da die Beschreibung des Algorithmus den Rahmen dieses Artikels sprengen würde, verweisen wir auf die gute Darstellung in Weron.<sup>14</sup> Neben der Erläuterung der Fourieranalyse im Stromkontext finden sich in der beiliegenden CD auch Programme zur schnellen Durchführung des Verfahrens.

Die ermittelte Saisonfunktion  $f_t$  wird nun von dem logarithmierten empirischen Datensatz subtrahiert. Aus dieser saisonbereinigten Zeitreihe werden die Parameter für die verbleibenden stochastischen Dynamiken der Gaspreise ermittelt. Die zu parametrisierende Differentialgleichung für die Renditeentwicklung Gasmarkt lautet dann:

$$dx_g = \kappa_g(\bar{f}_g - x_g)dt + \rho\sigma_g dz_g$$

Im Unterschied zu der allgemeinen Preisgleichung von oben lässt sich nun zur Parameteridentifikation ein konstantes langfristiges Gleichgewicht  $\bar{f}_g = \text{konstant}$  verwenden, da der Datensatz bereits trendbe-

reinigt ist. Mit dem identifizierten Parameterset

$$\varphi = (\kappa_g, \sigma_g, \bar{f}_g)$$

sind nun die stochastischen Eigenschaften des Gaspreisprozesses simulierbar.

Um das Modell so zu justieren, dass es im Erwartungswert die PFC (Preis-Forwardkurve) des aktuellen Handelstages trifft<sup>15</sup>, benutzen wir im Folgenden eine tägliche price[it]-Forwardkurve für den Bewertungstag 20. März 2009. Abbildung 4 zeigt diese Kurve. Unter Verwendung eines Stabilisierungsfunktionals  $\Omega$  wird bei der PFC-Erstellung der Vektor der empirischen Futurespreise  $b$  auf das lineare System  $Ax$  regressiert:

$$\min \left( \|Ax - b\|^2 + \alpha\Omega(\lambda) \right) \text{ mit } \Omega(\lambda) = \int_0^T \left( \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \right)^2 dt.$$

15 Annahmegemäß benutzen wir ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Dieses Maß führt bei vollständigen Märkten (und somit Arbitragefreiheit) zum gleichen Wert wie eine risikoaverse Bewertung. In der risikoneutralen Welt ist der erwartete Spotpreis in Abwesenheit der Risikoprämie identisch mit dem Futurespreis,  $E_t^*(S_T) = F_{t,T}$ .

Dies führt zu einem Verlauf der Futurespreisprognosen ohne Sprungstellen.<sup>16</sup>

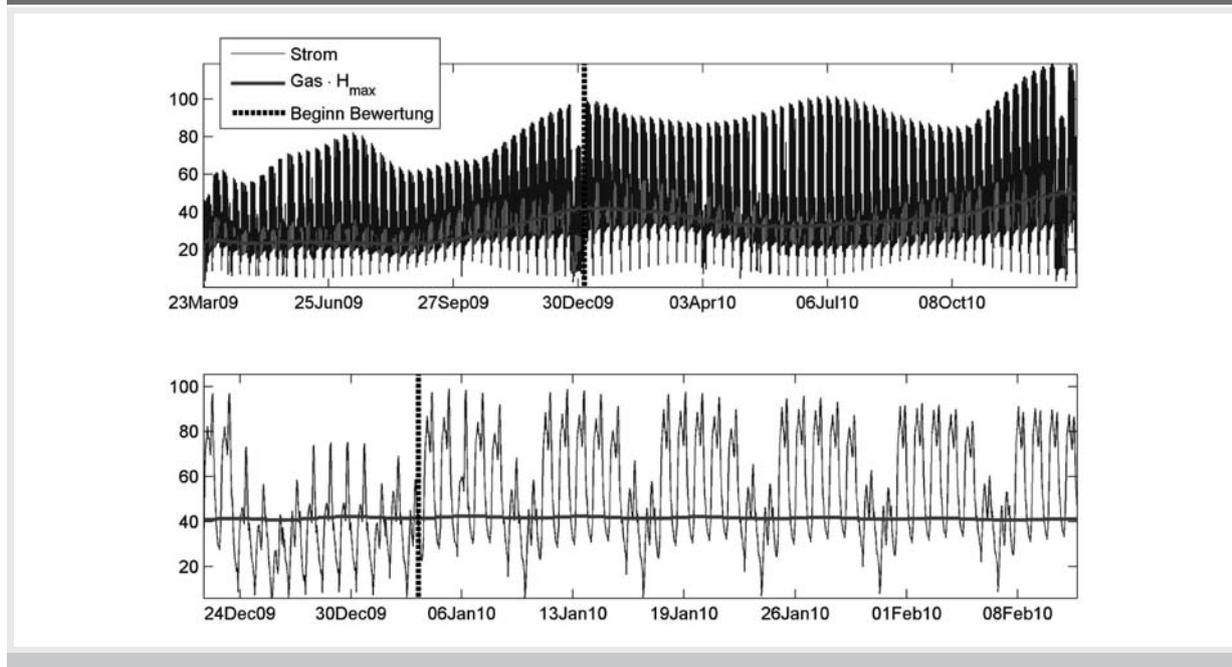
Damit die stochastische Differentialgleichung die PFC im Erwartungswert trifft, müssen die Verzögerungswirkungen durch den Mean-Reversion Teil mit Hilfe von Shifts in der Drift  $f_t^H$  ausgeglichen werden. Die gesuchte zeitabhängige Funktion  $f_t^H$  für das langfristige Mittel wird aus den PFC-Preisen  $F_{0,T}$  am Bewertungstag  $t = 0$  hergeleitet, wobei  $T$  die Fälligkeit der stündlichen Futures bezeichnet:

$$f_T^H = \left( \frac{d \ln(F_{0,T})}{dt} + \kappa_g \ln(F_{0,T}) + \frac{\sigma_g}{2\kappa_g} \left( 1 - e^{-2\kappa_g T} \right) \right) \frac{1}{\kappa_g}$$

Nun können mit dem Modell Simulationen erzeugt werden, deren Erwartungswerte den Preisen der PFC entsprechen,

16 Die Erstellung der PFC geschieht innerhalb eines 2-Faktormodells, das im ersten Schritt Spotpreisprognosen erzeugt. Anschließend wird die Risikoprämienfunktion  $\lambda(t)$  in den langfristigen Gaspreisbewegungen (s. Schwartz, Smith (2000) identifiziert. Dieses inverse Problem wird rekursiv im schnellen und stabilen impliziten Finite-Differenzen-Gitter über Tikhonov-Regularisierung (s. Tikhonov et al. (1995) gelöst.

Abb. 4 | Eine tägliche Gasfutureskurve zusammen mit einer stündlichen Kurve für Stromfuturespreise, beide für den 20.03.2009



und somit auch konform zu den gehandelten Blockkontrakten sind. Zur Erstellung der Monte-Carlo-Simulationen am Rechner kann die Spotpreisgleichung wie folgt diskretisiert werden:

$$x_g(t + \Delta t) = x_g(t) + \kappa_g(r_t^H - x_g(t))\Delta t + \sigma_g \varepsilon_g \sqrt{\Delta t}$$

wobei  $\varepsilon_i$  ( $i = s, j$ ) standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Bei hohem Mean Reversion Koeffizienten  $\kappa$  empfiehlt es sich, auf komplexere Schemata zur Diskretisierung zurückzugreifen.<sup>17</sup>

Abbildung 4 zeigt zwei Simulationen in unterschiedlichen Zoomstufen aus dem besprochenen TTF Spotpreismodell. Die berechneten täglichen Simulationenpfade müssen anschließend elementweise auf 24-Stunden-Auflösung granuliert werden, um Konformität zu den Strompreisen herzustellen. Da Einzelstunden im Moment nicht gehandelt werden, unterstellen wir den Tagespreis pro MWh als konstante Stundenpreise pro MWh.<sup>18</sup>

17 vgl. hierzu Kloeden, Platen (1999)

18 Unterstellte Korrelation ist hierbei 15 %. Je weniger Korrelation zwischen beiden Assets existiert, desto größer ist der Wert einer Spark-Spread Option.

#### 4.2.2 Stochastische Modellierung der Strompreise

Zur Kalibrierung des Strompreisprozesses verwenden wir EEX-Daten in 24-Stunden Auflösung für den Zeitraum 26.03.2006 bis 25.03.2009 (3 Jahre Samplezeitraum). Bei der Betrachtung der historischen Spotpreise fallen zwei Faktoren ins Auge, die bei der Kalibrierung der stochastischen Parameter zusätzlich beachtet werden müssen:

- Saisonalität: Strompreise weisen starke deterministische Muster über den Tag, die Woche und das Jahr auf, und
- Preisspitzen: aufgrund von z. B. nicht antizipierbaren Nachfrageschocks oder Ausfall von Schlüsselkraftwerken.

Da ein einfaches Modell wie aus dem vorhergehenden Abschnitt weder Preisspitzen noch stündlich wechselnde Volatilitäten und Korrelationsstrukturen zwischen den Einzelstunden beschreiben kann, sollte man an dieser Stelle zu komplexeren Modellen greifen. Zur HPFC-konformen Simulationserstellung verwenden wir im Folgenden das Programm ‚PricePowerTrader‘ von price[it]. Es folgt ein kurzer Abriss des zugrundeliegenden Modells.

In einem ersten Schritt werden die empirischen Daten logarithmiert und spikebereinigt. Es wird ein heuristischer Algo-

rithmus aus Clewlow und Strickland<sup>19</sup> verwendet. Hierbei werden die Preisspitzen aus den Renditen ermittelt, deren Abweichung vom Mittelwert außerhalb des  $3\sigma$ -Bandes liegen. Da Renditen innerhalb des  $3\sigma$ -Bandes mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,73 % auftreten, lassen sich Werte außerhalb dieses Bandes als extreme Werte interpretieren. Die identifizierten außergewöhnlichen Werte aus diesem iterativen Ansatz werden gespeichert und später bei der Modellierung der Preisspitzen wieder aufgegriffen. Der ursprüngliche Datensatz wird um diese Sprünge bereinigt, d. h. der extreme Anteil wird vom jeweiligen Stundenpreis subtrahiert.

Wie bei dem Gasmodell wird eine Fourieranalyse zur Zyklenermittlung angewendet. Für die Erstellung der Saison wurde der Datensatz zusätzlich vorab mit einer Hauptkomponentenanalyse<sup>20</sup> transformiert, um die einzelnen Einflüsse von saisonalen Schwankungen separat nach verursachenden Faktoren identifizieren zu können. Feiertage werden nach Klassen geordnet regressiert und unter Kenntnis der Höhe der Einflüsse bereinigt, um sie als normale Arbeitstage zu behandeln. Die

19 vgl. Clewlow und Strickland (2000)

20 Zur Beschreibung der Technik s. u. a. Borchert et al. (2006)

Abb. 5 | Drei Simulationen für Gas- und Strompreise<sup>18</sup>

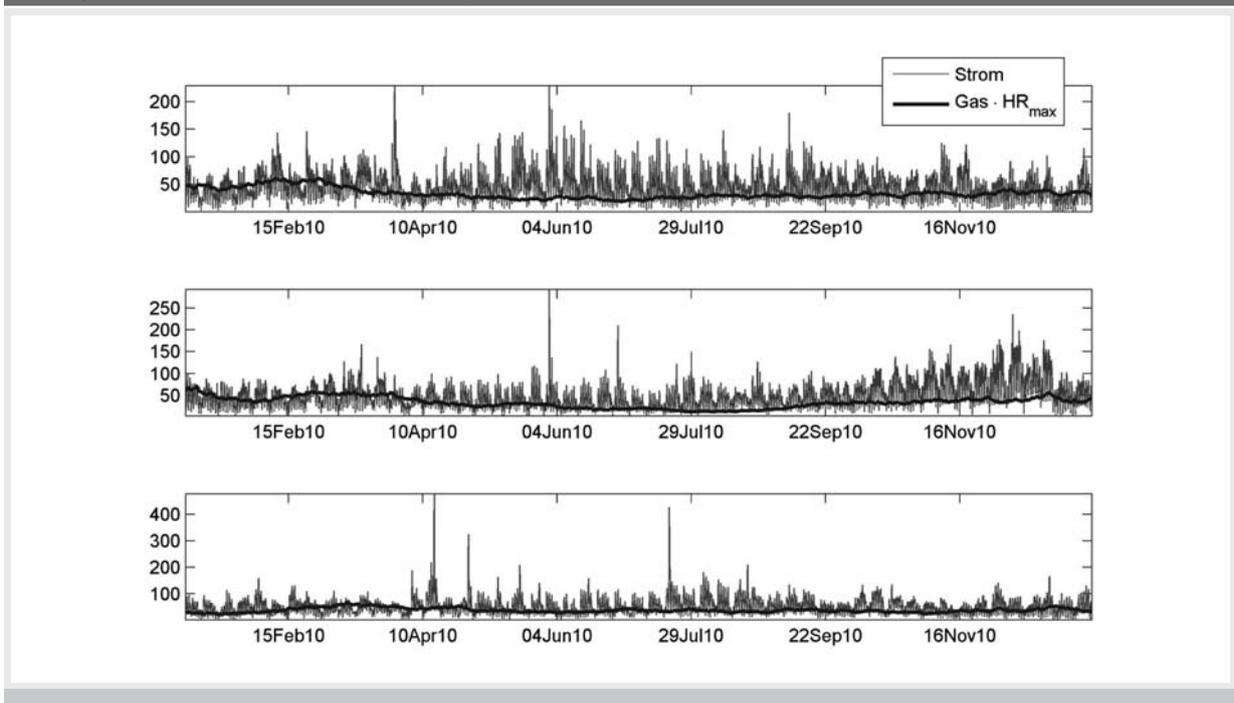
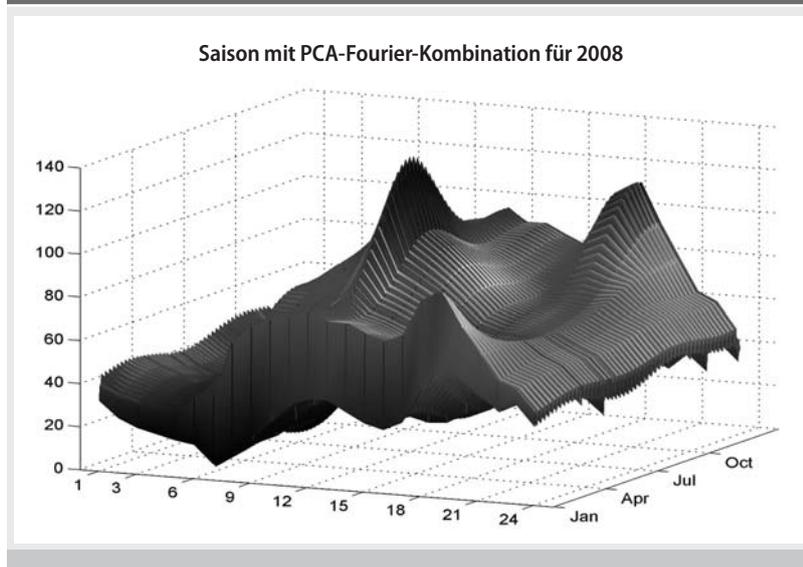


Abb. 6 | Saisonfigur Strompreise



ermittelte Saisonfunktion  $f_t$  wird dann von dem logarithmierten empirischen Datensatz subtrahiert. Abbildung 6 zeigt eine derart ermittelte Saisonfigur.

Die saison- und spikebereinigten Zeitreihen der 24 Einzelstunden werden anschließend erneut mit einer Hauptkomponentenanalyse in unkorrelierte Faktoren transformiert. Die Ladungen der 5 Faktoren erklären über 90 % der Gesamtvolatilität. Diese Ladungen werden nun als stochastische Prozesse parametrisiert.<sup>21</sup> Für die erste Faktorladung werden wie in Villaplana<sup>22</sup> ein kurz- und ein langfristiger AR-Prozess unterstellt. Auf diese Weise können hohe Mean-Reversion-Geschwindigkeiten bei gleichzeitigen, länger anhaltenden Niveauperänderungen erfasst werden. Die übrigen Faktorladungen werden über einfache Mean-Reversion Prozesse erfasst. Anschließend werden die gespeicherten Preisspitzenanalysiert. Als Sprungmodell dient eine bivariate Verteilung für positive und negative Preisspitzen.<sup>23</sup> Nachdem das komplette Parameter-set identifiziert ist, werden erstellte Preisprognosen über den langfristigen Preisfaktor an die HPFC-Preise angepasst. Dazu wird wieder die bereits erwähnte Technik der Tikhonov-Regularisierung im Finite-Differenzen-Gitter verwendet.

Die Erfassung der Korrelation zwischen Gas- und Strompreisen wird im vorliegen-

den Modell-Setup über den langfristigen Strompreis- und den Gaspreisprozess hergestellt. Um eine mögliche Korrelation im Falle von zwei 1-Faktor-Prozessen darzustellen, lauten die stochastischen Differentialgleichungen:

$$dx_1 = \kappa_1(\bar{f}_1 - x_1)dt + \sigma_1 dz_1$$

$$dx_2 = \kappa_2(\bar{f}_2 - x_2)dt + \rho\sigma_2 dz_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 dz_2$$

Die Korrelation  $\rho$  ist einer der wertbeeinflussenden Parameter von Spark Spread Optionen, da sie wesentlichen Einfluss auf die bivariate Verteilung beider Assets hat.<sup>24</sup>

### 4.3 Entwicklung eines Bewertungsschemas mittels stochastischer dynamischer Programmierung

Der dynamischen Programmierung liegt das Bellman'sche Optimalitätsprinzip zugrunde. Es besagt, dass die optimale Lösung eines Subproblems für den Zeitraum  $t = n, \dots, T$  mit  $n > 0$  immer auch Bestandteil der optimalen Lösung für den Zeitraum  $t = 0, \dots, T$  ist.<sup>25</sup> Somit kann das Gesamtproblem in einzelne kleine Optimierungsprobleme zerlegt werden. In dem vorliegenden Problemkontext bedeutet dies, dass man den optimalen Fahrplan des Kraftwerks in Abhängigkeit von Res-

triktionen und Unsicherheit vom Ende des Betrachtungshorizonts  $t = T$  schrittweise rekursiv bis zum Bewertungstag  $t = 0$  ermitteln kann.<sup>26</sup> Als Schrittweite zwischen zwei Entscheidungen definieren wir im Folgenden den diskreten Zeitraum  $\Delta t = 1/(24 \cdot 365)$ , dies entspricht dem Zeitraum einer Stunde ausgedrückt als Bruchteil eines Jahres.

$w_t$  bezeichnet den Zustand des Kraftwerks im Zeitpunkt  $t$  und  $z_t \in Z_t(w_t)$  die Entscheidung über den Zustand des Kraftwerks im Zeitpunkt  $t + 1$ .<sup>27</sup>

- $w = 0$ : Das Kraftwerk ist aus und kann in diesem Zustand bleiben ( $z = 0$ ), oder man kann die Ramp-Up Phase 1 einleiten ( $z = 1$ ).
- $w = i, i = 1, 2$ : Das Kraftwerk befindet sich in Ramp-up Phase  $i$  und kann ausgeschaltet werden ( $z = 0$ ), oder es kann in den Zustand  $z = i + 1$  gewechselt werden (Ramp-Up 2 bzw. produktionsbereit).<sup>28</sup>
- $w = 3$ : Das Kraftwerk ist produktionsbereit. Es kann ausgeschaltet ( $z = 0$ ), oder entweder auf Mindestlast  $Q_u$  oder Maximallast  $Q_o$  gefahren werden.<sup>29</sup>

Der Wert des Kraftwerks ergibt sich aus der Summe aller diskontierten realisierten Cashflows. Um den gesamten Cashflow zu maximieren, ist es notwendig, das optimale Kontrollstrategie-Set  $\pi^* = \{z_t^*\}, \forall t$  zu finden. Die zu lösende Aufgabe lautet:

$$V_0 = \max_{z_t \in Z_t(w_t) \text{ für } t=0..T} E \left( \sum_{t=0}^T e^{-rt} R_t | F_t \right)$$

wobei  $F_t$  den in  $t$  verfügbaren Informationsstand über Preise und aktuelle Zustände und  $E(\cdot)$  den Erwartungswertoperator bezeichnet. Hier wie nachfolgend wird mit  $E(\cdot)$  die Erwartungsbildung unter einem risikoneutralen Maß verstanden. Die einzelnen Cashflows  $R$  im Zeitpunkt  $t$  wer-

21 vgl. Skantzé et al. (2003)

22 vgl. Villaplana (2002)

23 vgl. hierzu Dias, Rocha (2000)

24 vgl. Carmona, Durrleman (2005)

25 vgl. Bertsekas (2005)

26 Hier wird u.a. die Markov-Eigenschaft genutzt, die aussagt, dass die Preise im Zeitpunkt  $t$  alle Informationen beinhalten, um Prognosen für den Zeitraum  $t + n$  zu erstellen (schwache Markteffizienz).

27 In Abschnitt 3 wurden bereits die möglichen Übergänge in Abhängigkeit vom momentanen Zustand definiert. Das mögliche Entscheidungssset wird nun definiert als  $Z_t(w_t)$ .

28 Wird das Kraftwerk nach beenden der Ramp-Up Phase 2 ( $w = 2$ ) in den Betriebszustand versetzt ( $z = 3$ ), so ist das Kraftwerk erst in dem nächsten Zeitschritt produktionsbereit ( $w = 3$ ).

29 Befindet man sich im produktionsbereiten Zustand ( $w = 3$ ), so kann man den zu diesem Zeitpunkt bekannten Preisspread nur nutzen, wenn man sich entschließt, in diesem Zustand zu bleiben ( $z = 3$ ).

den zustands- und entscheidungsabhängig als

$$R_t = R(w_t, z_t, \varphi_t^n)$$

definiert, wobei der Gas- und Strompreis zum Zeitpunkt  $t$  den Vektor  $\varphi_t^n = [x_{st}^n, x_{gt}^n]$ ,  $n=1, \dots, N$  bilden, mit  $N =$  Anzahl der Simulationspfade. Die möglichen  $R(\cdot)$ -Funktionen sind im Weiteren analog zu Abschnitt 3 wie folgt definiert:

- Das Kraftwerk (KW) ist aus ( $w_t = 0$ ):

$$z_t = \begin{cases} 0, R(0,0, \varphi_t^n) = 0 \\ 1, R(0,1, \varphi_t^n) = -c_{up} - c_r(x_{gt}, 0) \end{cases}$$

- Das KW befindet sich in Ramp-Up Phase  $w_t = i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$z_t = \begin{cases} 0, R(i,0, \varphi_t^n) = 0 \\ i, R(i,i+1, \varphi_t^n) = -c_r(x_{gt}, i-1) \end{cases}$$

- Das KW ist produktionsbereit ( $w_t = 3$ ):

$$z_t = \begin{cases} 0, R(3,0, \varphi_t^n) = 0 \\ 3, R(3,3, \varphi_t^n) = \max \left( Q_o \left( e^{x_{st}} - H_o e^{x_{gt}} \right), Q_u \left( e^{x_{st}} - H_u e^{x_{gt}} \right) \right) \end{cases}$$

wobei  $c_{up} = cst.$  die fixen Anfahrkosten der Anlage darstellt und

$$c_r(x_{gt}, j) = H_u(0,1 + j \cdot 1,9)e^{x_{gt}} Q_u$$

mit  $j = 0, 1$  die zustandsabhängigen Ramp-up Kosten aus Abschnitt 3 beschreibt. Die Variablen  $H_u$  bzw.  $H_o$  stehen für die Heatrates bei Mindestlast respektive Volllast.

Zum Ermitteln der Lösung wird begonnen mit der Definition von Randbedingungen für den Endzeitpunkt  $T$ . Im Folgenden unterstellen wir, dass das Kraftwerk zum Ende der Laufzeit des Kontraktes ausgeschaltet übergeben wird. Da wir keine Kosten für das Herunterfahren der Einheit annehmen<sup>30</sup>, impliziert dies einen Cashflow in  $T$  von 0 Euro in jedem Zustand  $w = 0, \dots, 3$  für jeden Pfad  $n$ ,  $n = 1, \dots, N$ :

$$V(i)_T = R(i, o, \varphi_T^n) = 0,$$

für  $i = 0, \dots, 3$ , wobei hier sowie im weiteren Verlauf  $V(i)_T^n$  den optimalen Wert des Kraftwerkes im Zustand  $i$  für den Zeitraum  $t$  bis  $T$  symbolisiert. Aus Vereinfachungsgründen verzichten wir im Folgen-

den bei den Ausdrücken  $V(i)_T^n$  auf den oberen Index  $n$ , es ist allerdings nicht zu vergessen, dass es sich stets um die zu einem Pfad  $n$  gehörigen Werte handelt. Der erste Schritt in dem rekursiven Verfahren dient der Bestimmung der Werte  $V(i)_{T-1}$  mit  $i = 1, \dots, 3$ . Dieser Schritt ist rein deterministisch, da die Endwerte  $V(i)_T$  bereits feststehen. Für jeden Zustand wird die mögliche Handlung  $z_t \in Z_t(w_t)$  gesucht, die den Ertrag maximiert. Für die aktuellen Zustände  $w_{T-1} = i$ ,  $i = 0, \dots, 2$  ergibt sich:

$$V(i)_{T-1} = R(i, o, \varphi_{T-1}^n) + e^{-r\Delta t} V(i)_T, i = 0, \dots, 2$$

mit  $R(i, o, \varphi_{T-1}^n) = 0$ ,

da durch die Aktion  $z_{T-1} = 0$  für das Springen in den Zustand  $w_T = 0$  keine Kosten entstehen. Es ist also in allen drei Zuständen optimal, das Kraftwerk auszulassen bzw. auszuschalten, da jede andere Aktion Geld in Form von Start-up-Kosten (nur im Zustand  $w = 0$ ) und Ramp-up-Kosten  $cr(x_{gt}^n)$  (in allen 3 Zuständen) verursachen würde, jedoch eine positive Einnahme durch Produktion nicht mehr generierbar ist. Ist die Einheit bereits hochgefahren ( $w = 3$ ), hat man noch Wahlrechte. Die optimale Handlung  $z_t^*$  ist die Aktion, die den Wert  $V(3)_{T-1}$  maximiert:

$$V(3)_{T-1} = \max_{z_{T-1} \in Z_{T-1}} \begin{cases} R(3,0, \varphi_{T-1}^n) + e^{-r\Delta t} V(0)_T \\ R(3,3, \varphi_{T-1}^n) + e^{-r\Delta t} V(3)_T \end{cases}$$

In diesem deterministischen Setting wird im Zustand  $w = 3$  der optimale Ertrag  $V(3)_{T-1}$  über die Wahl der optimalen Handlung  $z_{T-1}^*$  aus den drei Betriebszuständen  $z = 0$  (aus) bzw. Mindestlast oder Volllast berechnet. Hat man die optimalen Erträge für alle Zustände  $V(i)_{T-1}$  berechnet<sup>31</sup>, fährt man nun weiter rekursiv fort bis zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Dabei werden zu jedem Zeitschritt für jeden der vier möglichen Zustände die optimalen Handlungen bestimmt. Allerdings müssen die optimalen Handlungen  $z_t^*$ ,  $t = 0, \dots, T-2$ , für jeden Zustand nun unter Einbeziehung von Unsicherheit gefunden werden. Da der Kraftwerksbetreiber zum Zeitpunkt  $t$  für seine Erwartungsbildung bezüglich der Preise in  $t+n$ ,  $n > 1$ , nur die Informationen  $F_t$  nutzen kann, die in  $t$  bekannt

sind, ist er nun mit einem stochastischen Optimierungsproblem konfrontiert. Der Betreiber hat eine Entscheidung zu treffen, deren Wirkung sich unmittelbar und nicht vollkommen antizipierbar auf die nächsten Zeitschritte auswirkt.<sup>32</sup> Dieses pfadabhängige Kontrollproblem hat folgende mathematische Darstellung:

$$V(0)_t = \max_{z_t \in Z_t} \begin{cases} R(0,0, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(0)_{t+1} | z_t = 0, \varphi_t^n) \\ R(0,1, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(3)_{t+1} | z_t = 1, \varphi_t^n) \end{cases}$$

$$V(w)_t = \max_{z_t \in Z_t} \begin{cases} R(w,0, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(0)_{t+1} | z_t = 0, \varphi_t^n) \\ R(w,w+1, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(w+1)_{t+1} | z_t = w+1, \varphi_t^n) \end{cases}, w=1, 2$$

$$V(3)_t = \max_{z_t \in Z_t} \begin{cases} R(3,0, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(0)_{t+1} | z_t = 0, \varphi_t^n) \\ R(3,3, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} E(V(3)_{t+1} | z_t = 3, \varphi_t^n) \end{cases}$$

Um die bedingten Erwartungswerte  $E(V(w)_{t+1} | z_t, \varphi_t^n)$  zu approximieren, verwenden wir die Least-Squares-Monte-Carlo-Methode (LSMC).<sup>33</sup> Zu jedem Zeitpunkt  $t$  werden die  $(N \times 1)$ -Cash Flow-Vektoren  $\vec{V}(w)$ ,  $w = 1, \dots, 3$ , auf Basisfunktionen der beiden  $(N \times 1)$ -Spotpreis-Vektoren  $\vec{x}(w)_{st}$  und  $\vec{x}(w)_{gt}$  regressiert. Die  $(N \times 6)$ -Matrix der Basisfunktionen  $F_t$  belegen wir mit folgenden Polynomen, um die funktionale Abhängigkeit der Cash Flows von den Spotpreisen zu erfassen:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & (n \times 1) & e^{\vec{x}_{st}} & e^{\vec{x}_{gt}} & e^{\vec{x}_{st} + \vec{x}_{gt}} & e^{2\vec{x}_{st}} & e^{2\vec{x}_{gt}} \end{bmatrix}$$

Mit dem Ziel, den Impuls der Spotpreise in  $t$  auf den Cashflow in Periode  $t+1$  zu messen, berechnen wir die Cross-Sectional-Least-Squares Parameter:

$$b_t(w) = (F_t' F_t)^{-1} F_t' \left( e^{-r\Delta t} \vec{V}(w)_t \right), w = 1, \dots, 3,$$

wobei  $\vec{V}(w)_t$  den  $(N \times 1)$ -Vektor mit den  $N$  Elementen  $V_t^n(w)$  bezeichnet. Mit dem  $(6 \times 1)$ -Impulsvektor  $b_t(w)$  lässt sich der gesuchte Erwartungswert approximieren und auf dieser Basis der optimale Pfad unter Unsicherheit bestimmen:

30 Kosten für das Herunterfahren können problemlos in diesem Kontext integriert werden.

31 Man bezeichnet die Werte  $V_t(i)$  auch als „cost-to-go“.

32 Ein Beispiel: Um den unsicheren Spread für die Stunde 10 zu nutzen, muss bereits in Stunde 7 die erste Ramp-Up Phase eingeleitet werden.

33 vgl. Longstaff, Schwartz (2001)

**Tab. 1 | Ergebnisse der Bewertung**

Werte der Kraftwerksscheibe für das Kalenderjahr 2010 in €	deterministische Bewertung	stochastische Bewertung	prozentuale Differenz	Korrelation des Samples
ohne Restriktionen	61.900.000	68.197.272	10 %	
mit Restriktionen	56.995.000	62.094.000	9 %	36 %
ohne Restriktionen		71.205.360	15 %	
mit Restriktionen		65.151.000	14 %	22 %
ohne Restriktionen		72.587.760	17 %	
mit Restriktionen		66.595.000	17 %	0 %

$$z_t^* = \arg \min_{z_t \in Z_t} (R(w_t, z_t, \varphi_t^n) + F_t^n b_t(z_t))$$

$$V(w)_t^n = R(w_t, z_t^*, \varphi_t^n) + e^{-r\Delta t} V(z_t^*)_t^n$$

mit  $F_t^n$  als n-te Zeile der Matrix  $F_t$ . Diese Berechnungen kann man nun in jedem Zeitschritt für alle Zustände in den rechten Term des Gleichungssystems substituieren. Auf diese Art lässt sich das Problem rekursiv wie bereits beschrieben bis zum Zeitpunkt des Bewertungstages  $t = 0$  lösen. Zur Auswahl möglicher Basisfunktionen siehe auch den Artikel von Longstaff und Schwartz.<sup>34</sup>

Um nach Abschluss des rekursiven Verfahrens den Wert  $V(0)_0$  der Kraftwerksscheibe zum Zeitpunkt t im ausgeschalteten Zustand zu bestimmen, berechnet man den Durchschnitt über alle Elemente des Vektors

$$V(\bar{0})_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V(0)_0^n$$

In dem nächsten Abschnitt werden die Ergebnisse der Bewertung vorgestellt. Eine Analyse der Berechnungen findet u. a. anhand von Gegenüberstellungen mit alternativen Ansätzen statt.

### 5. Ergebnisse der Bewertung

Im Rahmen der Ergebnisdokumentation werden folgende Aspekte fokussiert:

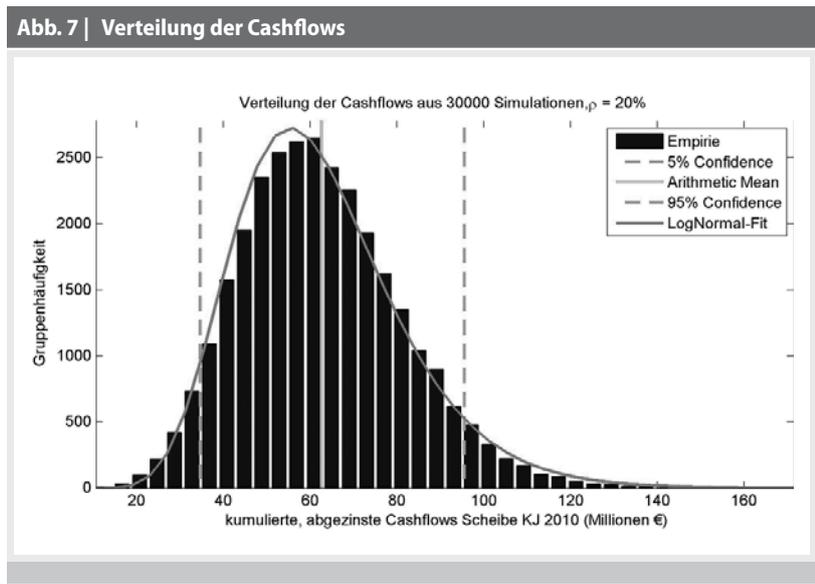
- absolute Höhe der Bewertungsergebnisse und relativer Vergleich zur deterministischen Bewertung
- Nutzen der Ergebnisverteilung
- Steuerung der Kraftwerksscheibe.

Im Rahmen des aufgestellten Modells wurden die operativen Ergebnisse der Kraftwerksscheibe berechnet. Hierbei

wurde der in Kapitel 3 beschriebene Fall implementiert. Es wurde eine Kraftwerksscheibe für das Kalenderjahr 2010 beispielhaft ausgewertet. Hierzu wurden alle Spotpreise für das Kalenderjahr 2010 entsprechend des in Kapitel 4.2 beschriebenen Verfahrens simuliert und der operative Cashflow aus dem in Kapitel 4.3 aufgestellten Modell abgeleitet. Da mit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gearbeitet wurde, werden entsprechend alle Ergebnisse mit dem risikofreien Zinssatz stetig diskontiert. Die Ergebnisse der Bewertung sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Es wurden verschiedene Berechnungen durchgeführt, um wesentliche Unterschiede in den Modellen und den Randbedingungen zu verdeutlichen. Zunächst wurden Berechnungen so durchgeführt, als bestünden keine Restriktionen im Ramp up. Dann wurde neben der in diesem Artikel vorgestellten stochastischen Bewertung auch eine deterministische Bewertung zum Vergleich durchgeführt. Auffallend an den Ergebnissen ist die hohe Bedeutung der Restriktionen sowohl bei der deterministischen als auch stochastischen Bewertung in Höhe der Differenz von 5–6 Mio. €. Eine vereinfachende Vernachlässigung bei der Bewertung von technisch-ökonomischen Restriktionen wäre also zu grob. Die Differenz zwischen der stochastischen und deterministischen Bewertung liegt bei 9–10 % des deterministischen Wertes. Dieses unterstreicht die Bedeutung des stochastischen Ansatzes bei der Wertermittlung. Neben diesen Bewertungsdifferenzen wurde die Wirkung der Korrelation zwischen den Gas- und Strompreisen auf die Bewertungshöhe untersucht. Hierzu wurden verschiedene Korrelationen aus verschiedenen Preisdaten-Stichproben verwendet. Deutlich ist der Anstieg des Wertes bei Abnahme der Korrelation zu erkennen. Dieser Effekt ist

34 vgl. Longstaff, Schwartz (2001)

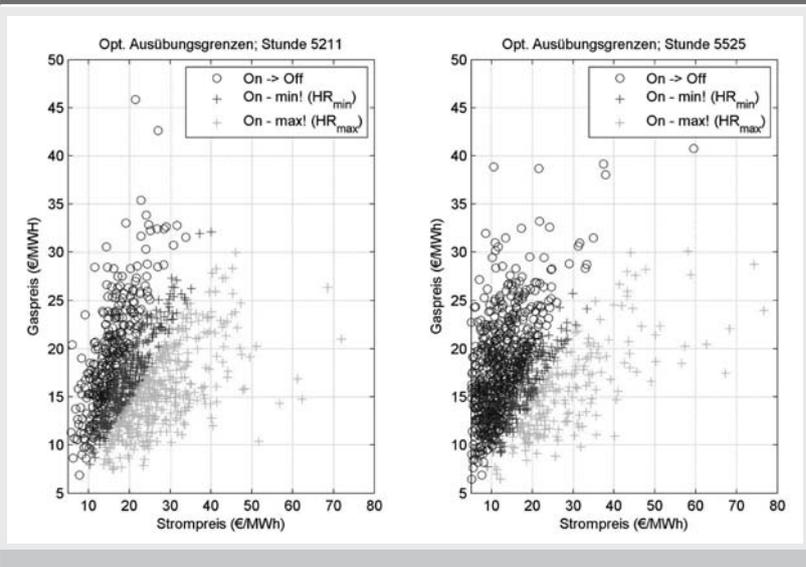


intuitiv, da eine geringere Korrelation größere spreads wahrscheinlicher macht und mithin den Optionswert vergrößert.

Ein weiteres wesentliches Ergebnis der stochastischen Modellierung ist das Vorliegen der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Cashflows aus der Nutzung der Kraftwerksscheibe. Diese Informationen fehlen bei der deterministischen Betrachtung vollständig. Folgend ist eine Verteilung bei 1000 Simulationspfaden aufgetragen.

In der Abbildung ist neben der empirischen Verteilung der Cashflows ebenfalls eine Grafik einer Normalverteilung aufgetragen. Deutlich erkennbar ist, dass die empirische Verteilung nicht einer Normalverteilung folgt. Dieses ist sogar bei „nur“ 1000 Simulationen erkennbar. Sichtbar ist, dass die empirische Verteilungsform linkssteil und hohe Wahrscheinlichkeit in den extrem hohen Cashflowbereichen existiert. Daneben lassen sich auch Quantilwerte ablesen. Gerade diese sind für Anwendungen des Risikomanagements von Bedeutung. Definiert man also z. B. einen profit at risk als die Differenz aus dem Erwartungswert der operativen Cashflows sowie einem Wert, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten wird und setzt man diese Wahrscheinlichkeit mit 95 % beispielsweise an, kann man einen profit at risk von etwa 30 Mio. € (ca. 65 Mio. € Erwartungswert abzüglich des 5 %-Quantilwert von ca. 35 Mio. €) ablesen. Zur operativen Risikosteuerung der Kraft-

Abb. 8 | Grenzen der Nutzung der Kraftwerksscheibe



werksscheibe könnte beispielsweise dieses Risiko limitiert werden.

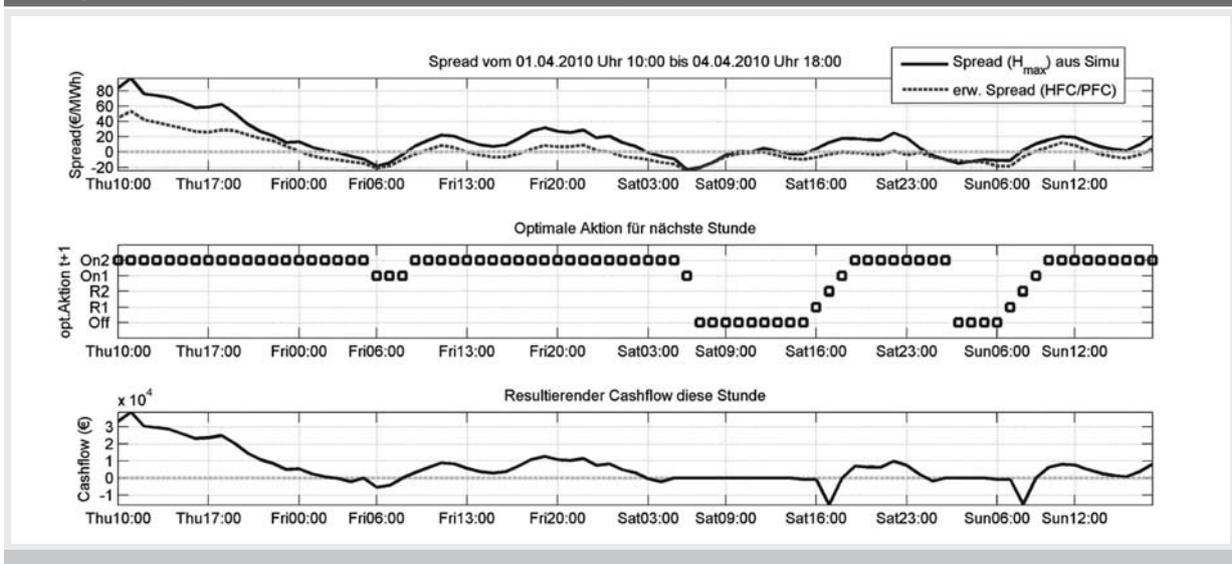
Zur weiteren operativen Steuerung der Kraftwerksscheibe sind aber noch weitere Ergebnisse interessant. Es lassen sich Felder identifizieren, die Informationen über die Betriebszustände der Kraftwerksscheibe geben. Hierbei lassen sich drei Grenzbe-reiche erkennen, ab denen ein Wechsel des Zustandes der Kraftwerksscheibe sinnvoll ist. Bei einer gewissen Kombination aus Strom- und Gaspreis kann man beispielsweise entscheiden, aus dem Zustand „Betrieb“ in den Zustand „Außerbetriebnah-

me“ zu wechseln. Derartige Grenzen lassen sich dann im operativen Betrieb als einfache Heuristiken verwenden, um schnell Entscheidungen treffen zu können, ohne das Modell neu rechnen zu lassen. In folgender Abbildung sind derartige Entscheidungsfelder am Beispiel zweier Stunden dargestellt. Bei der Grafik ist zu beachten, dass die Grenzen nicht linear sind.

Abbildung 9 demonstriert anhand eines einzelnen Simulationspfades die Funktionsweise des Algorithmus:

Aus den generierten optimalen Entscheidungsregeln lassen sich, wie bereits

Abb. 9 | Nutzung der Kraftwerksscheibe in einem Simulationspfad



angesprochen, optimale Kontrollstrategien ermitteln. Anhand des Beispiels in Abbildung 9 erkennt man den Zusatznutzen der stochastischen Betrachtung gegenüber einer deterministischen. Ein deterministisch optimiertes Kraftwerk würde im Bewertungsfall am Freitag um 0:00 Uhr ausgeschaltet werden. Da allerdings mit bekannter Wahrscheinlichkeit auch positive Abweichungen des Spreads möglich sind, hat der Betreiber die Chance auf Mehrgewinne. Mit Hilfe der Prognosen aus den aktuell bekannten Informationen (Kursniveau seit mehreren Tagen über Erwartung) entschließt sich der Optimierer in dem in der Abbildung skizzierten Einsatz unter stochastischen Bedingungen, das Kraftwerk statt einer Außerbetriebnahme auf Minimallast fahren zu lassen. Nach einer kurzen Phase negativer Cashflows resultiert insgesamt ein Mehrgewinn.

## Literaturverzeichnis

1. Bertsekas, D. (2005): *Dynamic Programming and Optimal Control*, Vol.1, 3.ed, Athena Scientific
2. Borchert, J., Schemm, R., Korth, S. (2006): *Stromhandel – Institutionen, Marktmodelle, Pricing und Risikomanagement*
3. Carmona, R., Durrleman V. (2003): *Pricing and Hedging Spread Options*, *SIAM Review*, Vol. 45, No. 4, 627-685
4. Clewlow, L., Strickland, C. (2000): *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima Publications, London
5. Deng, S., Xia, Z. (2005): *Pricing and Hedging Electricity Supply contracts: a Case with Tolling Agreements*, *Georgia Institute of Technology*
6. Deng, S., Johnson, B., Sogomonian, A. (2001): *Exotic electricity options and the valuation of electricity generation and transmission assets*, *Decision Support Systems* 30(2001), 383-392
7. Deng, S., Xia, Z. (2005): *Pricing and Hedging Electricity Supply contracts: a Case with Tolling Agreements*, *Georgia Institute of Technology*
8. Dias, M.A., Rocha K.M. (1999): *Petroleum Concessions With Extendible Options Using Mean Reversion*, Paper for 3rd International Conference on Real Options
9. Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994): *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press
10. Gubina A., Ilic M., Skantze P. (2000): *Bid-Based Stochastic Model for Electricity Prices: The Impact of Fundamental Drivers on Market Dynamics*, MIT Laboratory
11. Hull, J.C. (2003): *Options, Futures, and Other Derivatives*, Third ed., Pearson
12. Kloeden, P.E., Platen, E. (1999): *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer
13. Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. (2001): *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, *Finance*, May 9, 2001, Paper 1-01
14. Schwartz, E. S., (1997): *The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*, *The Journal Of Finance*, Vol LII, No.3, July 1997
15. Schwartz, E. S., Smith, J.E. (2000): *Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices*, *Management Science*, Vol.46, No. 7, July 2000, 893-911
16. Skantze, P., Gubina, A., Ilic, M. (2000): *Bid-based Stochastic Model for Electricity Prices: The Impact of Fundamental Drivers on Market Dynamics*, MIT Energy Laboratory Technical Report EL 00-004, Cambridge, Massachusetts
17. Tavella, D., Randall C. (2000): *Pricing Financial Instruments – The Finite Difference Method*, John Wiley & Sons Inc.
18. Tikhonov, A.N., Goncharky A.V. et al. (1995): *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
19. Villaplana, P. (2002): *Pricing Power Derivatives: A Two-Factor Jump-Diffusion Approach*, Working Paper
20. Weron, R. (2006): *Modeling and forecasting electricity loads and prices*, John Wiley & Sons Ltd.
21. Wilmott, P. (2006): *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd.